EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

MET MEDEWERKING VAN

DR. H. J. E. BETH, AMERSFOORT - DR. E. W. BETH, AMERSFOORT
DR. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK - DR. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN
DR. H. A. GRIBNAU, ROERMOND. - DR. B. P. HAALMEIJER, AMSTERDAM
DR. J. HAANTJES, AMSTERDAM - DR. C. DE JONG, LEIDEN
DR. J. POPKEN, TER APEL - IR. J. J. TEKELENBURG, ROTTERDAM
DR. W. P. THIJSEN, HILVERSUM - DR. P. DE VAERE, BRUSSEL
DR. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM.

18e JAARGANG 1941

Nr. 3

Prijs per Jaargang f 6.30*.
Voor intekenaars op het Nieuw
Tijdschrift v. Wiskunde f 5.25*.

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen. Prijs per jaargang *f* 6,30*. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6,30*) zijn ingetekend, betalen *f* 5,25*.

De leden van Liwenagel (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en Wimecos (Vereniging van leraren in de wiskunde, mechanica en de cosmographie aan H.B.S. 5-j. c. B, lycea en meisjes H.B.S. 5—6 j. c.) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van *f* 1,85* op de postgirorekening no. 8100 van Dr. C. de Jong te Leiden. De leden van Wimecos storten hun contributie van *f* 2,75 (waarin de abonnementskosten op Euclides begrepen zijn) op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593 van de Firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen *f* 5,25* per jaar franco per post.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

Blz.
J. G. VAN DER CORPUT, A remarkable family 65
Boekbesprekingen 79
Ingekomen boeken 83
Dr. J. RIDDER, Over de additieve functionaalvergelijking en een additieve functionaalkongruentie 84
Dr. E. W. BETH, Hoofdstukken uit de moderne formele logica . 93

De omvang van deze jaargang van Euclides moet ingevolge bepalingen omtrent papierbeperking 30 % kleiner zijn dan vorige jaargangen, dus 12 of 12½ vel.

Uitgever en Redactie.

What is most salient in the now obtained results? I am particularly struck by the exceptional significance of the origin. This exceptional behaviour may be explained as follows:

Consider two functions that coincide in the vicinity of the origin and satisfy the said functional equation in an interval $0 \leqq x \leqq b$, where b is positive. Then there exists a positive number $\gamma \leqq b$ such that the two functions coincide everywhere in the interval $0 \leqq x \leqq \gamma$. From the functional equation it follows now that they coincide for all non-negative $x \leqq b$ and $\leqq 2\gamma$, hence for all non-negative $x \leqq b$ and $\leqq 4\gamma$, and so on, i.e. for all non-negative $x \leqq b$. The two functions coincide therefore in the whole interval $0 \leqq x \leqq b$, where the functional equation is valid. In other words, a function satisfying the functional equation in the interval $0 \leqq x \leqq b$ is defined in this whole interval as soon as it is established in the vicinity of the origin. For its characterization it is therefore sufficient to define it in the vicinity of the origin, which we can attain by imposing on it an appropiate condition at the origin. As we have seen, in the case $f(0) = 0$ the condition of differentiability at the origin is sufficient, in the cases $f(0) = \pm i$ the less exacting condition of continuity at that point. In view of this phenomenon I here introduce the word nucleus. Suppose that in an interval $a \leqq x \leqq b$ a functional equation is given and that every function, satisfying that equation in that interval, is defined unambiguously in the whole interval $a \leqq x \leqq b$, as soon as it is established in the vicinity of a particular point ω $(a \leqq \omega \leqq b)$. Then I call ω a nucleus of the said functional equation. For the characterization of a function by means of a functional equation possessing a nucleus, it will in general be sufficient to impose on that function an appropriate condition valid at the nucleus. Later on we shall meet functional equations without a nucleus; the characterization by such an equation will generally prove to be less simple.

Let us now consider another formula. The identity

$$\operatorname{tg} x = \frac{-2 \operatorname{tg}\left(-\frac{x}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(-\frac{x}{2}\right)}$$

produces the functional equation

$$\boxed{f(x) = \frac{-2f\left(-\dfrac{x}{2}\right)}{1 - f^2\left(-\dfrac{x}{2}\right)}}.$$

Suppose that $f(x)$ satisfies this relation in an interval $a \leqq x \leqq b$, where $a < 0 < b$. For $x = 0$ the equation reduces to

$$f(0)\,(1 - f^2(0)) = -2f(0),$$

hence $f(0) = 0$ or $\pm\sqrt{3}$. If $f(x)$ is continuous at the origin, it is in the vicinity of the origin different from i and also from $-i$, so that we may put again $f(x) = \operatorname{tg}\varphi(x)$. In this vicinity the functional equation is equivalent to

$$\operatorname{tg}\varphi(x) = -\operatorname{tg}2\varphi\left(-\frac{x}{2}\right)$$

and thus to

$$\varphi(x) = -2\varphi\left(-\frac{x}{2}\right) + \pi h(x), \tag{17}$$

where $h(x)$ is an integer. Since $f(x)$ is continuous at the origin, we may choose $\varphi(x)$ thereat continuous too. Then $h(x)$ has the same property; this number is an integer and possesses therefore in the vicinity of the origin a constant value, that I will denote by h. By putting $x = 0$, I find $\varphi(0) = \frac{1}{3}\pi h$.

The condition of continuity of $f(x)$ at the origin is not sufficient for the characterization. For this reason I shall assume that $f(x)$ is not only continuous, but even differentiable at the origin. As we have seen above, we may then write

$$\varphi(x) = \varphi(0) + kx + x\varepsilon(x),$$

where $\varepsilon(x)$ tends with x to zero. Formula (17) now gives for the numbers $x \neq 0$ in the vicinity of the origin $\varepsilon(x) = \varepsilon\left(-\dfrac{x}{2}\right)$, i.e.

$$\varepsilon(x) = \varepsilon\left(-\frac{x}{2}\right) = \varepsilon\left(\frac{x}{2^2}\right) = \varepsilon\left(-\frac{x}{2^3}\right) = \dots$$

Since $\varepsilon\left(\dfrac{x}{2^q}\right)$ tends to zero, if q be increased indefinitely, we have in the said vicinity

$$\varepsilon(x) = 0, \; \varphi(x) = \tfrac{1}{3}\pi h + kx$$

and

$$f(x) = \operatorname{tg}\,(\tfrac{1}{3}\pi h + kx),$$

where h and k are independent of x, and h is an integer.

If $\frac{1}{2}b \leqq |a| \leqq 2b$, the origin is a nucleus and the result obtained is true in the whole interval $a \leqq x \leqq b$, where the functional equation is valid. Thus we come to the conclusion:

If $a < 0 < b$ *and* $\frac{1}{2}b \leqq |a| \leqq 2b$, *then* $\operatorname{tg} kx$ *and* $\operatorname{tg}\,(\pm \frac{\pi}{3} + kx)$, *where* k *is independent of* x, *are the only functions* $f(x)$ *differentiable at the origin, that satisfy the considered functional equation in the interval* $a \leqq x \leqq b$.

Similarly I find

If $a < 0 < b$ *and* $\frac{1}{2}b \leqq |a| \leqq 2b$, *then* $\operatorname{tg} kx$, *where* k *is independent of* x, *are the only functions* $f(x)$, *differentiable and vanishing at the origin, that satisfy the relation*

$$\boxed{\left\{1 + f\left(\frac{x}{2}\right) f\left(-\frac{x}{2}\right)\right\} f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) - f\left(-\frac{x}{2}\right)}$$

for $a \leqq x \leqq b$.

In fact, in the vicinity of the origin I write

$$f(x) = \operatorname{tg}\varphi(x) \text{ and } \varphi(x) = kx + x\varepsilon(x)$$

and I obtain

$$\varepsilon(x) = \tfrac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right) - \tfrac{1}{2}\varepsilon\left(-\frac{x}{2}\right),$$

hence

$$|\varepsilon(x)| + |\varepsilon(-x)| \leqq \left|\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \left|\varepsilon\left(-\frac{x}{2}\right)\right|$$

$$\leqq \left|\varepsilon\left(\frac{x}{4}\right)\right| + \left|\varepsilon\left(-\frac{x}{4}\right)\right|$$

and so on, therefore $\varepsilon(x) = \varepsilon(-x) = 0$. This result establishes the existence of a positive $\gamma \leqq b$ and $\leqq |a|$ such that $f(x) = \operatorname{tg} kx$ in the interval $-\gamma \leqq x \leqq \gamma$. This interval contains therefore no x such that

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(-\frac{x}{2}\right) = \pm i. \tag{18}$$

Successively it follows from the functional equation that $f(x) = \operatorname{tg} kx$

in the interval

$$-2^q\gamma \leqq x \leqq 2^q\gamma \quad (q = 2, 3, \ldots),$$

so far this interval is contained in $a \leqq x \leqq b$. Thus we find $f(x) = \operatorname{tg} kx$ for $a \leqq x \leqq b$.

A function satisfying the functional equation at the origin possesses at that point one of the values 0, i and $-i$. Now, what about the solutions assuming at the origin one of the values i and $-i$? The answer is not similar to the one given in the other examples. I have warned you: our family has many surprises in store for us. In the case $f(0) = i$ the function $f(x)$ is not characterised by the functional equation. Even the supplementary condition that it possesses derivatives of all orders at all points of the interval $a \leqq x \leqq b$ (the origin included!) does not help us. For if $f(x)$ satisfies the functional equation in the interval $-2\gamma \leqq x \leqq 2\gamma$ and $f(x) = i$ for $-\gamma \leqq x \leqq \gamma$, then the function $f(x)$ may be chosen in the two intervals $\gamma < x \leqq 2\gamma$ and $-2\gamma \leqq x < -\gamma$ completely arbitrarily; in fact, if (18) is true, $f(x)$ disappears in the functional equation.

Dealing with the preceding functional equations I have had success with the substitution $f(x) = \operatorname{tg} \varphi(x)$, but generally this substitution is of no use. For instance it fails to work for the functional equation

$$\boxed{f(x) = \frac{2f\left(-\frac{x}{2}\right)}{-1 + f^2\left(\frac{x}{2}\right)}},$$

though $\operatorname{tg} kx$ is a solution. We must therefore try another substitution. For $x = 0$ the functional equation reduces to

$$f(0)\,(-1 + f^2(0)) = 2f(0),$$

hence $f(0) = 0$ or $\pm\sqrt{3}$. To begin with I will go in search of solutions that are differentiable and vanish at the origin. If I put $f'(0) = k$, the derivative of $f(x) - \operatorname{tg} kx$ at the origin is equal to $k - k = 0$, so that we may write

$$f(x) = \operatorname{tg} kx + x\varepsilon(x),$$

where $\varepsilon(x)$ tends with x to zero. Now comes the worst part: in what manner can it be proved that $\varepsilon(x)$ really vanishes? By substituting into the functional equation the expression written for $f(x)$, we obtain

$$\varepsilon(x) = v(x)\,\varepsilon\left(-\frac{x}{2}\right) + w(x)\,\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right),$$

where

$$v(x) = \frac{1}{1 - \{\frac{1}{2}x\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{tg}\frac{1}{2}kx\}^2}$$

and

$$w(x) = \frac{2\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}kx + \frac{1}{2}x\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}kx}{(1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}kx)\{1-(\frac{1}{2}x\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right)+\operatorname{tg}\frac{1}{2}kx)^2\}}.$$

In the vicinity of the origin we find therefore

$$|\,\varepsilon(x)\,| < (1 + Ax^2)\left|\,\varepsilon\left(-\frac{x}{2}\right)\right| + Ax^2\left|\,\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right)\right|,$$

A denoting a convenient number independent of x. I choose this vicinity so small that therein $Ax^2 < \frac{1}{2}$. Then we have in this vicinity

$$\begin{aligned}(1 - Ax^2)e^{4Ax^2} &\geqq (1 - Ax^2)(1 + 4Ax^2 + 8A^2x^4)\\ &\geqq (1 - Ax^2)(1 + 4Ax^2) + 4A^2x^4\\ &= 1 + 3Ax^2 \geqq 1 + Ax^2,\end{aligned}$$

hence

$$|\,\varepsilon(x)\,| \leqq \left\{(1 - Ax^2)\left|\,\varepsilon\left(-\frac{x}{2}\right)\right| + Ax^2\left|\,\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right\} e^{4Ax^2}$$

From this inequality it follows that

$$\delta(x) \leqq (1 - Ax^2)\,\delta\left(-\frac{x}{2}\right) + Ax^2\,\delta\left(\frac{x}{2}\right),$$

if I put

$$\delta(x) = |\,\varepsilon(x)\,|\,e^{\frac{16}{3}Ax^2}.$$

By replacing x by $-x$ and adding, I find in the vicinity of the origin

$$\begin{aligned}\delta(x) + \delta(-x) &\leqq \delta\left(\frac{x}{2}\right) + \delta\left(-\frac{x}{2}\right)\\ &\leqq \delta\left(\frac{x}{4}\right) + \delta\left(-\frac{x}{4}\right)\end{aligned}$$

and so on. Since $\varepsilon\left(\frac{x}{2^q}\right)$ and thus also $\delta\left(\frac{x}{2^q}\right)$ tend to zero, if q be increased indefinitely, $\delta(x)$ vanishes in the said vicinity, hence $\varepsilon(x) = 0$ and $f(x) = \operatorname{tg} kx$. If $\frac{1}{2}b \leqq |a| \leqq 2b$, the origin is again a nucleus of the functional equation and thus we have established the following result:

If $a < 0 < b$ and $\frac{1}{2}b \leqq |a| \leqq 2b$, the functions tg kx, where k is independent of x, are the only functions $f(x)$, differentiable and vanishing at the origin, which satisfy the considered functional equation for $a \leqq x \leqq b$.

What about the solutions $f(x)$ that assume at the origin the value $\sqrt{3}$? For the present I will confine my attention to such a function that is twice differentiable at the origin, so that we may write

$$f(x) = \sqrt{3}(1 + kx + lx^2 + x^2\varepsilon(x));$$

in this argument $\varepsilon(x), \varepsilon_1(x), \ldots, \varepsilon_{10}(x)$ denote functions tending with x tot zero. We have

$$\begin{aligned} 1 - f^2(x) &= 1 - 3\{1 + kx + x\varepsilon_1(x)\}^2 \\ &= -2\{1 + 3kx + x\varepsilon_2(x)\}, \\ \frac{1}{1 - f^2(x)} &= -\tfrac{1}{2}\{1 - 3kx + x\varepsilon_3(x)\}, \\ -2f\left(-\frac{x}{2}\right) &= -2\sqrt{3}\{1 - \tfrac{1}{2}kx + x\varepsilon_4(x)\} \end{aligned}$$

and

$$\frac{-2f\left(-\frac{x}{2}\right)}{1 - f^2(x)} = \sqrt{3}\{1 - \tfrac{7}{2}kx + x\varepsilon_5(x)\}.$$

The functional equation therefore shows that k vanishes. Hence

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{3}\{1 + lx^2 + x^2\varepsilon(x)\}, \\ 1 - f^2(x) &= 1 - 3\{1 + 2lx^2 + x^2\varepsilon_6(x)\} \\ &= -2\{1 + 3lx^2 + x^2\varepsilon_7(x)\}, \\ \frac{1}{1 - f^2(x)} &= -\tfrac{1}{2}\{1 - 3lx^2 + x^2\varepsilon_8(x)\}, \\ -2f\left(-\frac{x}{2}\right) &= -2\sqrt{3}\{1 + \tfrac{1}{4}lx^2 + x^2\varepsilon_9(x)\} \end{aligned}$$

and

$$\frac{-2f\left(-\frac{x}{2}\right)}{1 - f^2(x)} = \sqrt{3}\{1 - \tfrac{11}{4}lx^2 + x^2\varepsilon_{10}(x)\}.$$

The functional equation therefore shows that l vanishes too, so that

$$f(x) = \sqrt{3}\,\{1 + x^2\varepsilon(x)\}.$$

By substituting this into the functional equation we find

$$1 + x^2\varepsilon(x) = \frac{1 + \frac{1}{4}\,x^2\varepsilon\left(-\frac{x}{2}\right)}{1 + \frac{3}{4}\,x^2\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{3}{32}\,x^4\,\varepsilon^2\left(\frac{x}{2}\right)},$$

i.e.

$$\varepsilon(x) = v(x)\varepsilon\left(-\frac{x}{2}\right) + w(x)\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right),$$

where

$$v(x) = \frac{1}{4 + 3x^2\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{3}{8}\,x^4\varepsilon^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

and

$$w(x) = \frac{-3 - \frac{3}{8}\,x^2\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right)}{4 + 3x^2\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{3}{8}\,x^4\varepsilon^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

In the vicinity of the origin

$$|\,v(x)\,| \leqq \tfrac{1}{4}(1 + x^2) \leqq \tfrac{1}{4}e^{x^2}$$

and

$$|\,w(x)\,| \leqq \tfrac{3}{4}(1 + x^2) \leqq \tfrac{3}{4}e^{x^2},$$

hence

$$\delta(x) \leqq \tfrac{1}{4}\delta\left(-\frac{x}{2}\right) + \tfrac{3}{4}\,\delta\left(\frac{x}{2}\right),$$

if I put

$$\delta(x) = e^{\frac{4}{3}x^2}\,|\,\varepsilon\,(x)\,|.$$

Thus we obtain

$$\begin{aligned}\delta(x) + \delta(-x) &\leqq \delta\left(\frac{x}{2}\right) + \delta\left(-\frac{x}{2}\right)\\ &\leqq \delta\left(\frac{x}{4}\right) + \delta\left(-\frac{x}{4}\right)\end{aligned}$$

and so on, so that $\delta(x)$ vanishes. In this manner we find in the vicinity of the origin $f(x) = \sqrt{3}$ and this relation is true in the whole interval $a \leqq x \leqq b$, if $\frac{1}{2}b \leqq |\,a\,| \leqq 2b$, the origin being in

that case a nucleus of the fundamental equation. Thus we have proved:

If $a < 0 < b$ and $\frac{1}{2}b \leqq |a| \leqq 2b$, the function that has the constant value $\sqrt{3}$ is the only function $f(x)$ twice differentiable at the origin and assuming at that point the value $\sqrt{3}$ and satisfying the considered functional equation for $a \leqq x \leqq b$.

It is clear that in this assertion $\sqrt{3}$ may be replaced by $-\sqrt{3}$.

Why is it that I do require that $f(x)$ is twice differentiable at the origin and why should not I be content with the condition that it is differentiable at that point? Supposing the differentiability only at the origin, I may write

$$f(x) = \sqrt{3}(1 + kx + x\varepsilon_1(x)),$$

where $\varepsilon_1(x)$ tends with x to zero, but it is beyond my ability to prove, merely using what I have considered in this chapter, that $\varepsilon_1(x)$ vanishes. For all that, $\varepsilon_1(x)$ is equal to zero in that case, but only later on shall we learn how this can be proved. By anticipating this result, I obtain:

If $a < 0 < b$ and $\frac{1}{2}b \leqq |a| \leqq 2b$, the functions

$$f(x) = tg\, kx;\ f(x) = \sqrt{3} \text{ and } f(x) = -\sqrt{3},$$

where k is independent of x, are the only functions differentiable at the origin and satisfying the concerned functional equation in the interval $a \leqq x \leqq b$.

Let us now deal with a functional equation without a nucleus, viz.

$$\boxed{\frac{f(x)}{1 - f^2(x)} = \frac{2f\left(\frac{x}{2}\right) - 2f^3\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - 6f^2\left(\frac{x}{2}\right) + f^4\left(\frac{x}{2}\right)}}.$$

The origin is no nucleus, for if $f\left(\frac{x}{2}\right)$ is given, we find for $f(x)$ a quadratic equation, so that in general $f(x)$ is not defined unambiguously.

If I put $x = 0$, the functional equation reduces to

$$q(1 - 6q^2 + q^4) - (2q - 2q^3)(1 - q^2) = 0,$$

where $q = f(0)$. Thus I obtain

$$q(q^2 + 1)^2 = 0,$$

hence $q = 0$ or $\pm i$.

Although the origin is no nucleus, yet I obtain the following simple result:

If $b > 0$, the function that is equal to the constant i is the only function $f(x)$, continuous at the origin, assuming at that point the value i and satisfying the considered equation in the interval $0 \leqq x \leqq b$.

The proof is not difficult. By multiplying both sides of the functional equation by $2i$ and further adding 1 I find

$$-\frac{(f(x) - i)^2}{1 - f^2(x)} = \frac{\left(f\left(\frac{x}{2}\right) - i\right)^4}{1 - 6f^2\left(\frac{x}{2}\right) + f^4\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Now I write

$$f(x) = i + \varepsilon(x),$$

where $\varepsilon(x)$ tends with x to zero. In the vicinity of the origin the two denominators are approximately equal to 2 and 8 and the absolute value of $f\left(\frac{x}{2}\right) - i$ is less than 1, hence

$$|\varepsilon(x)| < \left|\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right)\right|.$$

As we know, this inequality implies $\varepsilon(x) = 0$, so that $f(x) = i$ in the vicinity of the origin.

For all numbers x in the interval $0 \leqq x \leqq b$ such that $f\left(\frac{x}{2}\right) = i$ the functional equation gives

$$\frac{f(x)}{1 - f^2(x)} = \frac{4i}{8} = \tfrac{1}{2}i.$$

Fortunately this quadratic equation has a double root $f(x) = i$. Thus we find $f(x) = i$ in the whole interval $0 \leqq x \leqq b$ and the assertion is proved.

By replacing i by $-i$, I obtain

If $b > 0$, the function that is equal to the constant $-i$, is the only function $f(x)$, continuous at the origin, assuming at that point the value $-i$ and satisfying the considered functional equation in the interval $0 \leqq x \leqq b$.

Now we have only to investigate the solutions $f(x)$ that

vanish at the origin. I shall only consider the solutions that are differentiable at the origin, so that I may write

$$f(x) = \operatorname{tg} \varphi(x) \text{ and } \varphi(x) = kx + x\varepsilon(x),$$

where $\varepsilon(x)$ tends with x to zero. In this manner the functional equation is changed into

$$\tfrac{1}{2} \operatorname{tg} (2\varphi(x)) = \tfrac{1}{2} \operatorname{tg} (4\varphi(\tfrac{1}{2}x)),$$

therefore into

$$\varphi(x) = 2\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\pi}{2} h(x),$$

where $h(x)$ is an integer. In the vicinity of the origin $h(x) = 0$ and $\varepsilon(x) = \varepsilon\left(\frac{x}{2}\right)$, hence $\varepsilon(x) = 0$. Thus we have found $f(x) = \operatorname{tg} kx$ in the vicinity of the origin, but it is not certain at all that this relation is valid in the whole interval $0 \leqq x \leqq b$. On the contrary, if $f(x) = \operatorname{tg} kx$ in an interval $0 \leqq x < \beta$ where $\frac{b}{2} < \beta < b$, then $f(x)$ may possess the value $-\operatorname{cotg} kx$ for $\beta \leqq x \leqq b$. In fact, in that case the functional equation is satisfied. To characterise $f(x)$ by the functional equation in the whole interval $0 \leqq x \leqq b$, next to requiring differentiability at the origin, we must impose on $f(x)$ an additional restriction concerning the points of the interval $0 < x \leqq b$. For that purpose it is sufficient to assume the continuity of $f(x)$ in the whole interval $0 \leqq x \leqq b$, as is apparent from the following theorem.

If $b > 0$, the functions tg kx, where k is independent of x, are the only functions $f(x)$, differentiable and vanishing at the origin, that are continuous for $0 \leqq x \leqq b$ and that satisfy the considered functional equation in that interval.

In fact, let β be the largest number $\leqq b$ such that $f(x) = \operatorname{tg} kx$ for $0 \leqq x < \beta$. From the argument above it appears that β is positive. On account of continuity $f(\beta) = \operatorname{tg} k\beta$. It is therefore sufficient to show $\beta = b$. Otherwise β would be less than b. For the points x in the vicinity of β we should have

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} kx,$$

hence it would follow from the functional equation that

$$\frac{f(x)}{1 - f^2(x)} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} kx - 2 \operatorname{tg}^3 \frac{1}{2} kx}{1 - 6 \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}kx + \operatorname{tg}^4 \frac{1}{2}kx}$$

$$= \tfrac{1}{2} \operatorname{tg} 2kx = \frac{\operatorname{tg} kx}{1 - \operatorname{tg}^2 kx},$$

hence

$$f(x) = \text{tg } kx \text{ or } -\text{cotg } kx.$$

The latter value is excluded for the points x in the vicinity of β, since $f(x)$ is continuous at β and

$$f(\beta) = \text{tg } k\beta \neq -\text{cotg } k\beta.$$

For the points x in the vicinity of β we should obtain $f(x) = \text{tg } kx$, which contradicts the convention that β is chosen as large as possible. Thus $\beta = b$ and $f(x)$ possesses the value tg kx in the whole interval $0 \leqq x \leqq b$.

Characterization of the cosine.

The duplication formula of the cosine produces the functional equation

$$\boxed{f(x) = 2f^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1}.$$

I am interested in the functions $f(x)$ that satisfy this relation in an interval $0 \leqq x \leqq b$, where b is any given positive number. The origin is a nucleus. By putting $x = 0$ we obtain

$$2f^2(0) - f(0) - 1 = 0,$$

hence $f(0) = 1$ or $-\frac{1}{2}$.

Now, please, be on your guard: a function $f(x)$ differentiable at the origin and assuming at that point the value 1 is not characterised by the condition that it satisfies the functional equation in the interval $0 \leqq x \leqq b$. For I may choose in the interval $\frac{1}{2}b < x \leqq b$ an arbitrary (real or complex) bounded function $\psi(x)$; to each positive number $x \leqq b$ corresponds an integer $m \geqq 0$ with the property $\frac{1}{2}b < 2^m x \leqq b$ and I may define $f(x)$ $(0 < x \leqq b)$ as

$$f(x) = \cos\,(x\psi(2^m x));$$

particularly I have in the interval $\frac{1}{2}b < x \leqq b$

$$f(x) = \cos\,(x\psi(x)).$$

This function $f(x)$ satisfies the functional equation in the interval $0 < x \leqq b$. In fact, according to the definition of $f(x)$, applied with $\dfrac{x}{2}$ and $m + 1$ in place of x and m, we have

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\,\psi\,(2^m x)\right),$$

whence the functional equation follows.

If we put $f(0) = 1$, we have

$$| f(x) - f(0) | = | 1 - \cos (x\psi(2^m x)) |$$
$$\leqq Cx^2,$$

where C is independent of x, and therefore

$$\frac{f(x) - f(0)}{x}$$

tends with x to zero.

From this illustration we deduct that a function $f(x)$ differentiable at the origin and assuming at that point the value 1, is not characterised by the functional equation. On the contrary, it may assume in the interval $\frac{1}{2}b < x \leqq b$ quite arbitrary bounded values. Now it is natural to impose on the function the supplementary condition that it is twice differentiable at the origin. That this additional condition is indeed sufficient, follows from the next theorem.

Let $b > 0$. The functions $\cos kx$, where k is independent of x, are the only functions twice differentiable at the origin, assuming at that point the value 1, and satisfying the functional equation in the interval $0 \leqq x \leqq b$.

The hypothesis that $f(x)$ is twice differentiable at the origin requires somewhat more then is strictly necessary. A function $f(x)$ twice differentiable at the origin is in the vicinity of that point approximately equal to a quadratic polynomical, i.e. can be written in the form

$$f(x) = p + qx + rx^2 + x^2\varepsilon(x), \qquad (19)$$

where $\varepsilon(x)$ tends with x to zero. Conversely, if in the vicinity of the origin $f(x)$ is approximately equal to a quadratic polynomial, it is not necessarily twice differentiable at that point, in other words if (19) is true, where $\varepsilon(x)$ tends with x to zero, $f(x)$ is not necessarily twice differentiable at the origin. For instance the function that possesses for positive x the value

$$e^{-\frac{1}{x}} \sin e^{\frac{2}{x}}$$

and vanishes at the origin, can be written in the form (19), where $p = q = r = 0$, but is not twice differentiable at the origin.

The condition that the function $f(x)$ with $f(0) = 1$ is in the vicinity of the origin approximately equal to a quadratic

polynomial is sufficient for its characterization by the functional equation, as appears from the following proposition:

Let $b > 0$. The functions $\cos kx$, where k is independent of x, are the only functions which assume at the origin the value 1, satisfy in the interval $0 \leqq x \leqq b$ the functional equation and are, in the vicinity of the origin, approximately equal to a quadratic polynomial.

To prove this generalisation of the preceding assertion, I consider a function $f(x)$ possessing the properties in question. Then (19) is true, where $p = 1$ in virtue of $f(0) = 1$. In the argument below $\varepsilon_1(x), \ldots, \varepsilon_5(x)$ denote functions tending with x to zero. We have

$$f(x) = 1 + qx + x\varepsilon_1(x)$$

and the functional equation gives

$$\begin{aligned} 1 + qx + x\varepsilon_1(x) &= 2\left\{1 + \tfrac{1}{2}qx + \tfrac{1}{2}x\varepsilon_1\left(\frac{x}{2}\right)\right\}^2 - 1 \\ &= 1 + 2qx + x\varepsilon_2(x), \end{aligned}$$

hence $q = 2q$, therefore $q = 0$ and

$$f(x) = 1 + rx^2 + x^2\varepsilon(x).$$

Putting $f(x) = \cos\varphi(x)$, where $\varphi(x)$ tends with x to zero, we obtain

$$\begin{aligned} -rx^2 - x^2\varepsilon(x) &= 1 - f(x) \\ &= 1 - \cos\varphi(x) \\ &= \tfrac{1}{2}\varphi^2(x)\,.\,(1 + \varepsilon_3(x)), \end{aligned}$$

hence

$$\varphi^2(x) = -2rx^2 + x^2\varepsilon_4(x),$$

therefore

$$\varphi(x) = \pm x\sqrt{-2r} + x\varepsilon_5(x).$$

By the substitution $f(x) = \cos\varphi(x)$ the functional equation reduces to

$$\cos\varphi(x) = \cos 2\varphi\left(\frac{x}{2}\right),$$

therefore to

$$\varphi(x) = \pm 2\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + 2\pi h(x),$$

where $h(x)$ is an integer. Since $\varphi(x)$ tends with x to zero, this integer vanishes in the vicinity of the origin and therefore

$$\varphi(x) = \pm 2\varphi\left(\frac{x}{2}\right),$$

hence

$$x\sqrt{-2r} \pm x\varepsilon_5(x) = \pm x\sqrt{-2r} \pm x\varepsilon_5\left(\frac{x}{2}\right). \qquad (20)$$

If $r \neq 0$, the formula

$$x\sqrt{-2r} \pm x\varepsilon_5(x) = -x\sqrt{-2r} \pm x\varepsilon_5\left(\frac{x}{2}\right)$$

is excluded in the vicinity of the origin, since $\varepsilon_5(x)$ tends with x to zero. In the vicinity of the origin we have therefore in any case

$$\varepsilon_5(x) = \pm\, \varepsilon_5\left(\frac{x}{2}\right),$$

hence

$$\varepsilon_5(x) = 0; \quad \varphi(x) = \pm\sqrt{-2r}\, x$$

and

$$f(x) = \cos\sqrt{-2r}\, x.$$

The origin being a nucleus, the latter formula is valid in the whole interval $0 \leqq x \leqq b$. This establishes the theorem.

Now a remark about the reality of the solutions. If we are interested in real functions only, we must choose k in such a manner that $\cos kx$ is real. If we put $k = l + im$, we have

$$\cos kx = \cos lx \cos imx - \sin lx \sin imx.$$

The first term is real, the latter purely imaginary. If $\cos kx$ is real in the interval $0 \leqq x \leqq b$, this latter term vanishes, in other words $l = 0$ or $m = 0$, hence $k = l$ or $k = im$ and therefore $\cos kx = \cos lx$ or

$$\cos kx = \tfrac{1}{2}(e^{mx} + e^{-mx}) = \cosh mx.$$

In this manner we have found:

Let $b > 0$. The functions $\cos tx$ and $\cosh tx$, where t is a real number independent of x, are the only real functions, twice differentiable [1] *at the origin, assuming at that point the value* 1 *and satisfying in the interval $0 \leqq x \leqq b$ the considered functional equation.*

---

[1]) The condition „twice differentiable at the origin'' may be replaced by the less exacting condition „being in the vicinity of the origin approximately equal to a quadratic polynomial.''

BOEKBESPREKING.

Tafels in vier decimalen benevens gegevens op verschillend gebied voor schoolgebruik, door Dr. H. J. E. Beth. — 2e druk, prijs *f* 0,50. — Uitg. P. Noordhoff N.V., Groningen, Batavia, 1941.

Een zeer handig boekje, dat veel meer biedt dan de bescheiden titel suggereert, zooals blijkt uit de volgende korte inhoudsopgave. Het bevat logarithmentafels voor de getallen van 1 tot 2000, voor sinussen, cosinussen, tangenten en cotangenten, opklimmend met 6′ benevens een extratafel voor log sin en log tg voor hoeken van 0° tot 5°, opklimmend met 1′. Het tweede gedeelte bevat vooreerst de lijst der chemische elementen met rangnummer en periodiek systeem, verder tabellen voor soortgelijke gewichten, calorische grootheden, brekingsindices en electrische constanten. Ook zijn gegevens opgenomen over zon, aarde, maan en planeten. Aan het slot vindt men tabellen voor n^2, n^3, $\sqrt{n}$ en $\frac{1}{n}$ voor de getallen van 1 tot 100, logarithmen van $1 + i$ en $1 - d$, en tabellen voor de omzetting van hoeken in radialen.

De studenten van de middelbare scholen vinden in dit boekje ongeveer alle numerieke gegevens die zij bij het maken van sommen over natuur- of scheikunde noodig hebben. Verder zal het zelfs zeer nuttig zijn voor universiteitsstudenten, die hier in handig formaat voor hun physisch of chemisch practicum de noodige gegevens bij elkaar vinden.

Na deze aanbeveling mag ik met het oog op een eventueelen herdruk wel wijzen op een paar foutjes in de lijst der elementen. De symbolen van alabaminium en virginium zijn niet *Am* en *Va,* maar *Ab* en *Vi* of *Vg*. Element no. 61 is niet *illyrium* maar *illinium,* terwijl *lantaan* en *mazurium* krachtens de afleiding der woorden *lanthaan* en *masurium* moeten worden geschreven. Daar het hier zeer zeldzame elementen betreft zijn deze onnauwkeurigheden voor den gebruiker geen bezwaar. Van de elementen alabaminium, illinium, masurium en virginium is zelfs het bestaan nog zeer twijfelachtig.

Roermond. Dr. P. H. van Laer.

Prof. Dr. A. D. Fokker. Hoepels en Tollen. Mart. Nijhoff. 1941. (Overdruk uit Archives du Musée Teyler, dl. IX, blz. 343—430).

Deze publicatie geeft in de eerste plaats een verslag van de op Zaterdagmiddagen 22, 29 Maart en 5 April 1941 in Teyler's Stichting te Haarlem gehouden voordrachten. De spreker wil de voor niet-ingewijden paradoxaal schijnende gedragingen van draaiende lichamen begrijpelijk maken met behulp van een met groot vernuft samengestelde reeks van demonstraties, waardoor de grondbeginselen het

eigendom van den hoorder en aanschouwer moeten worden. In hoeverre dit inderdaad gelukt, moet aan de beoordeeling van de betrokkenen overgelaten worden; het zou niet billijk zijn, af te gaan op een lezing van de tekst en het bekijken van de plaatjes.

De spreker beroept zich in een motto op niemand minder dan Poinsot, als hij van meening is, dat hij zich plaatst „au vrai point de vue", wanneer hij ernaar streeft niet te veel theorie te stellen tusschen de hoorders en de tollen en daardoor „een sluier daartusschen te spannen in plaats van dien weg te trekken".

De verdere inhoud van deze publicatie komt voor bespreking in dit tijdschrift niet in aanmerking. H. J. E. Beth.

F. Harkink. Inleiding tot het Practisch Rekenen. (P. Noordhoff N.V., Groningen—Batavia, 1941, ing. ƒ3,60, gec. ƒ4,10).

Onze leerlingen van de H.B.S. en van het gymnasium cijferen over het algemeen ongaarne en slecht. Met getallen gaan ze niet vlot om, uit het hoofd rekenen, zelfs bij heel eenvoudige getallen, vinden ze lastig; ze doen het liever op een kladje en vinden dan nog vaak een verkeerde uitkomst. Ingewikkelder berekeningen — met logarithmen en goniometrische functies — krioelen vaak van de rekenfouten, slordigheden gewoonlijk, die bewijzen, dat onze leerlingen — en misschien niet onze leerlingen alleen — weinig waarde hechten aan nauwkeurig cijferen. „Het is maar een rekenfout, de manier is toch goed" is een opmerking, die men vaak van de zijde der leerlingen hoort, maar het is verkeerd naar mijn meening, om al te veel aan de op deze wijze uitgeoefende drang naar een goed cijfer toe te geven, vooral wanneer een zeer ruwe schatting van de uitkomst hen duidelijk had kunnen doen zien, dat hun antwoord onmogelijk goed kon zijn.

Erger nog komt vaak het gebrek aan cijfervaardigheid bij onze leerlingen uit bij het vak „finantieele rekenkunde" in de hoogste klassen der A-afdeeling. Hier is het niet alleen slordigheid, maar werkelijk gebrek aan kennis van het vak rekenkunde, die oorzaak is van het vaak verkeerde resultaat van de berekeningen of van de onhandige manier waarop deze berekeningen zijn uitgevoerd. Hier komen de leerlingen te staan voor de opgave om zich zelf rekenschap te geven van de nauwkeurigheid, die in het resultaat bereikt moet worden en van het aantal nauwkeurige cijfers, die ze om dit resultaat te bereiken in hun bewerkingen moeten opnemen; ze moeten „verkorte" bewerkingen toepassen en ook daarvan komt — naar mijn ervaring tenminste — vaak zeer weinig terecht.

Misschien is dit laatste een gevolg van het feit, dat dit „rekenen met onnauwkeurige getallen" in de tweede klasse onzer scholen, waar het als onderdeel der rekenkunde op het program staat, voor de leerlingen vaak te lastig blijkt te zijn, zoodat de behandeling ervan veelal langs hen heen gaat en er in de vierde klas, bij de toepassingen blijkt, dat er maar zeer weinig van is blijven hangen.

Nu is dit slecht en onhandig cijferen voor onze leerlingen niet zoo heel erg. Hun rapportcijfer of hun examencijfer zal er wat lager door worden, maar er hangt verder niets van af. Geheel anders

wordt dit echter wanneer zij in de practijk van het leven met cijferwerk te maken krijgen; dan gaat de opvatting „maar een rekenfoutje" niet meer op, dan maakt een cijferfout vaak het geheele werk waardeloos en is het niet uitgesloten, dat een rekenfout zeer ernstige gevolgen heeft. Vooral in de techniek, — en hoeveel onzer oud-leerlingen gaan niet verder in technische richting — maar ook in andere vakken — verzekeringsbedrijven, banken, handel en industrie — is nauwkeurig, vlug en systematisch cijferen een belang van de eerste orde. En onze leerlingen, die zich in deze richting willen bekwamen, of die daarin onmiddellijk practisch willen gaan werken, zullen zich dit vlot omgaan met getallen en het nauwkeurig en vlug werken daarmee moeten eigen maken, willen ze een dragelijk figuur slaan. Zij zullen gedwongen worden zich zoowel met de theorie ervan als met de practische hulpmiddelen daarvoor — tabellen, tafels, rekenlinealen, tel- en rekenmachines — vertrouwd te maken, met grafieken te leeren werken en met nomogrammen te leeren omgaan.

Het boekje van den Heer Harkink geeft nu voor al diegenen, die in een of andere richting met cijferwerk in aanraking zullen komen, een uitstekende inleiding om zich hiertoe te bekwamen. Hij onthoudt zich van diepgaande theoretische beschouwingen, maar fundeert goed de regels die gegeven worden. Nergens is het oppervlakkig populair, maar ook nergens eischt het meer wiskundige kennis, dan die welke in de derde klasse der H.B.S. bereikt wordt. Het geeft achtereenvolgens: Aanwijzingen en kunstgrepen voor het cijferen, benaderde waarden, verkorte bewerkingen, rekenhulpmiddelen en het rekenen met machines, alles met sprekende voorbeelden en duidelijke teekeningen en een groot aantal opgaven ter oefening.

Het laatste hoofdstuk van het boekje, over Rekenhulpmiddelen, beslaat ongeveer de helft van den geheelen omvang ervan; een deel van dit hoofdstuk bespreekt het gebruik van tafels, logarithmische en goniometrische tafels, ook rekentafels, kwadraattafels en reciprokentafels; hierin geeft de schrijver vele belangrijke opmerkingen over het gebruik dier tafels, over interpolatie, over sexagesimale en decimale verdeeling van hoeken, over het gebruik van deze tafels in verband met het rekenen met rekenmachines enz. Het belangrijkste deel echter van dit hoofdstuk — en zelfs van het geheele boek — is wel dat, waarin de schrijver behandelt het rekenen met tel- en rekenmachines, waarover, voor zoover mij bekend, in het geheel geen litteratuur bestond buiten de handleidingen, die bij de machines worden geleverd. En ook hier is de schrijver erin geslaagd een beknopt, maar zeer duidelijk en volledig inzicht te geven in wat er met deze machines bereikt kan worden, volgens een methode, die de schrijver de „algebraische methode" noemt en „principiëel berust op het gebruik van positieve en negatieve getallen".

Het spreekt wel vanzelf, dat men het rekenen met de machine niet uit een boek kan leeren, maar dat men de machine er bij moet hebben om daarmee te oefenen voor het verkrijgen van de noodige routine. Omgekeerd echter is het ook onjuist te meenen, dat wanneer men de handgrepen kent, die men voor het laten werken van de machine noodig heeft, men dan ook alles uit de machine halen kan

wat zij kan geven. Daarvoor is een inleiding, zooals de Heer Harkink die op meesterlijke wijze geeft, onmisbaar.

Het zou dan ook m.i. zeer gewenscht zijn, dat bij de opleiding van onze middelbare technici het „practische rekenen" zooals dit in dit boek wordt behandeld als verplicht vak zou worden gegeven, terwijl ook de verschillende opleidingen voor handels- en kantoorpersoneel zeer nuttig werk zouden doen als zij ook dit vak zouden geven en de leerlingen met het practisch gebruik van allerlei soorten tel- en rekenmachines zouden bekend maken en er eenige vaardigheid in konden verschaffen. Ook studenten, die bij hun werk later veel met cijferen te maken krijgen — dus zeker alle studenten aan de T. H. te Delft — zullen verstandig doen, dit boekje door te werken en zich op de hoogte te stellen van het gebruik van machines, om later in staat te zijn om te beoordeelen of het voordeel kan opleveren om deze ook in het bedrijf of op het bureau, waar zij werken, in te voeren — wat in zeer vele gevallen het geval zal blijken te zijn.

We kunnen dan ook den Heer Harkink dankbaar zijn, dat hij ons dit boekje heeft gegeven, waardoor velen gebruik kunnen maken van de groote ervaring die hij op het gebied van practisch rekenen als landmeter heeft verzameld. Ook leeraren in exacte vakken zullen er verschillende aardige en nieuwe dingen in kunnen vinden, die ze bij hun lessen kunnen gebruiken.

Het boek verdient een grooten lezerskring, in het bijzonder onder onze aanstaande technici. W. J. Vollewens.

INGEKOMEN BOEKEN.

Van J. B. WOLTERS, Groningen.

Dr. JOH. H. WANSINK, *Reken- en Stelkunde* voor het Middelbaar en Voorbereidend Hoger Onderwijs, deel IIIa, uitgave voor het Gymnasium *f* 1,—*, geb. *f* 1,25*

Van P. NOORDHOFF, Groningen.

JOH. HAGE, *Koersberekening.* **2e druk.** 152 blz. *f* 3,90*, geb. *f* 4,60*

Inhoud: Inleiding 1—51.

I. Koersberekening bij gehele tijdseenheden, blz. 52—91.
II. id. bij gebroken tijdseenheden, blz. 92—115.
III. Enige belangrijke bijzonderheden, blz. 116—152.

Een zeer goed boek; bestemd voor studerenden voor de akte K XII en voorts voor kantoren en scholen, waar de mathematische koersberekening theoretisch en practisch aan de orde komt b.v. bij Banken, Levensverzekeringsmaatschappijen, Hogere Handelsschool, Effectenkantoren, Accountantskantoren, Rijks- en gemeentebureaux.

Van de uitgeverij WALTMAN, Delft.

Ir. W. J. VOLLEWENS c.i. *Repetitie-dictaat* Analyse I; **3e druk** . . . . *f* 3,25*

Inhoud: I. Functies blz. 11—33. II. Limieten blz. 34—47. III. Differentiëren van functies van één onafhankelijke variabele blz. 48—77. IV. Het differentiëren van impliciet gegeven functies van één onafhankelijk variabele blz. 78—88. V. Theorema van Rolle; middelwaardestellingen; formules van Taylor en Mac Laurin; reeksontwikkeling blz. 89—106. VI. Toepassingen der differentiaalrekening; onbepaalde vormen; maxima en minima blz. 107—126. VII. Onbepaalde integralen blz. 127—169.

Een handig boekje, waarin beknopt wordt geboden, wat de eerste jaars in Delft voortgezet krijgen; vooral practisch en eenvoudig.

Van P. NOORDHOFF, Groningen.

Grafiekenschrift. **9e druk** . . . . *f* 0,52[5]*

P. WIJDENES. *Planimetrie* I, een eenvoudig schoolboek voor het eerste onderwijs in Vlakke Meetkunde. **3e druk,** 104 blz. 141 fig., met gradenboog, driehoek en overzicht . . . . *f* 1,70*

P. WIJDENES en Dr D. DE LANGE. *Vraagstukken uit Rekenboek I.* **9e druk** . . . . *f* 0,90*

P. WIJDENES en Dr H. J. E. BETH. *Nieuwe Schoolalgebra* I. **12e druk** en II **11e druk,** beide onveranderde herdrukken . . . . à *f* 2,25*

P. WIJDENES en Dr D. DE LANGE, *Vlakke Meetkunde* I. **12e druk.** *f* 1,85*, gec. . . . . *f* 2,10*

OVER DE ADDITIEVE FUNCTIONAALVERGELIJKING EN EEN ADDITIEVE FUNCTIONAALKONGRUENTIE

DOOR

J. RIDDER.

In twee in Euclides opgenomen bijdragen [1]) wordt een functionaalbetrekking behandeld, welke dient ter karakteriseering der goniometrische functies sinus en cosinus. Daarnaast vindt men in Art. 2 een bespreking van de met de genoemde functionaalrelatie verband houdende additieve functionaalkongruentie $\varphi(x + y) \equiv \varphi(x) + \varphi(y) \pmod{2\pi}$, alsook van de additieve functionaalvergelijking $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

In de volgende bladzijden wenschen wij enkele verdere eigenschappen van deze additieve kongruentie en van de additieve functionaalvergelijking toe te voegen. Vooraf mogen eenige definities en eigenschappen uit de theorie der metrische groepen in herinnering worden gebracht. [2])

1. Onder *een metrische ruimte* wordt een verzameling van elementen, *punten* genoemd, verstaan, waarbij aan ieder geordend paar x, y als afstand een getal (x, y) met de volgende eigenschappen:

a) $(x, x) = 0$, $(x, y) > 0$ voor $x \neq y$,

b) $(x, y) = (y, x)$,

c) $(x, z) \leqq (x, y) + (y, z)$,

is toegevoegd.

Een rij van punten $\{x_n\}$ heet *convergent*, als

$$\lim_{p,\, q \to \infty} (x_p,\, x_q) = 0$$

---

[1]) J. C. H. Gerritsen, Euclides *16* (1939), p. 92—99 (Art. *1*), en J. G. van der Corput, Euclides *17* (1940), p. 55—75 (Art. *2*).

[2]) Zie ook S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warschau 1932, de inleiding en hoofdstuk 1.

is; ze heet *convergent naar het punt* x_0 (of wel $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$), als

$$\lim_{n \to \infty} (x_n, x_0) = 0$$

is.

Iedere naar een punt convergente rij $\{x_n\}$ is daardoor ook convergent. Geldt bovendien, omgekeerd, dat iedere convergente rij convergent is naar zeker punt, dan heet de ruimte *volledig*.

Een punt x_0 heet *verdichtingspunt* van een verzameling G, als er een rij van punten $\{x_n\}$ bestaat met $x_n \neq x_0$, x_n G (voor $n = 1, 2 \ldots$) en $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. De verzameling der verdichtingspunten van G is *de afgeleide G′ van G*. Is $G' = G$, zoo heet G *perfekt*. Onder *bol met middelpunt* x_0 *en straal* $r > 0$ verstaat men de verzameling van al die punten x, waarvoor $(x, x_0) \leqq r$ is. Een verzameling E heet *nergens dicht*, als $\overline{E} = E + E'$ geen enkele bol als deelverzameling bevat. Een verzameling, welke de som is van aftelbaar vele nergens dichte verzamelingen heet *van de eerste kategorie;* is een verzameling niet van de eerste kategorie, zoo wordt ze *van de tweede kategorie* genoemd.

Zijn V en V_1 twee metrische ruimten en doet men met elk punt $x \in V$ een punt $U(x) \in V_1$ korrespondeeren, dan zegt men, dat in V *de operatie* $U(x)$ is gedefinieerd. $U(x)$ heet *continu in het punt* x_0, als voor iedere rij van punten $\{x_n\}$, welke in V naar x_0 convergeert, de bijbehoorende rij $\{U(x_n)\}$ in V_1 naar $U(x_0)$ konvergeert; $U(x)$ is *continu in V;* als ze continu is in ieder punt van V. De rij van operaties $\{U_n(x)\}$, met $x \in V$, $U_n(x) \in V_1$, *konvergeert naar de operatie* $U_0(x)$, als in ieder punt $x \in V$ $\lim\limits_{n \to \infty} U_n(x)$ bestaat en gelijk aan $U_0(x)$ is; $U_0(x)$ heet dan *de limiet der rij* $\{U_n(x)\}$.

Onder *de klasse* $K(V_1)$ *van in V naar Borel meetbare operaties* verstaat men de kleinste klasse van operaties in V, met korrespondeerende elementen in de metrische ruimte V_1, welke

1°. alle in V continue operaties omvat, en

2°. de limiet van iedere in V konvergente rij van tot $K(V_1)$ behoorende operaties bevat.

De in V gedefinieerde operatie $U(x)$, met $U(x) \in V_1$ voor iedere x, voldoet aan *de voorwaarde van Baire,* als in iedere niet leege, perfekte verzameling $P \subset V$ een deelverzameling G ligt, welke in de metrische ruimte P (met dezelfde definitie van afstand als in

V) van de eerste kategorie is, en verder zoodanig, dat $U(x)$ in de metrische ruimte P—G (eveneens met dezelfde afstandsdefinitie als in V) continu is.

Eigenschap 1. Iedere in V gedefinieerde operatie $U(x)$, met $U(x) \epsilon V_1$ voor iedere $x \epsilon V$, welke in V naar Borel meetbaar is, voldoet aan de voorwaarde van Baire.

Een volledige metrische ruimte G heet *een metrische groep*, als aan ieder geordend puntenpaar x, y een eenduidig bepaald punt z als *som*, $z = x + y$, is toegevoegd, waarbij de groepaxioma's vervuld zijn:

a) $(x + y) + z = x + (y + z)$,

b) er bestaat een nulpunt 0, zoodanig, dat $0 + x = x + 0 = x$ is voor iedere $x \epsilon G$,

c) bij ieder punt x behoort een z.g. *invers punt* $-x$, dat voldoet aan $x + (-x) = 0$,

terwijl daarnaast bovendien

d) uit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ steeds $\lim\limits_{n \to \infty} (-x_n) = -x$, en

e) uit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = y$ steeds $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n + y_n) = x + y$ volgt.

Zijn G en G_1 twee metrische groepen en is $z = U(x)$, met $x \epsilon G$, $z \epsilon G_1$, een in G gedefinieerde operatie, zoo heet deze *additief*, als

$U(x + y) = U(x) + U(y)$ is voor ieder paar $x, y \epsilon G$.

Vrij eenvoudig laat zich bewijzen:

Eigenschap 2. Iedere in G additieve operatie $U(x)$, met $U(x) \epsilon G_1$ voor iedere $x \epsilon G$, welke continu is in één punt van G, is continu in G.

Ook heeft men:

Eigenschap 3. Iedere in G additieve operatie $U(x)$, met $U(x) \epsilon G_1$ voor iedere $x \epsilon G$, welke de voorwaarde van Baire vervult, is continu in G.

2. De verzameling der reëele getallen vormt een metrische groep R_1, als men onder som van twee elementen (getallen) hun arithmetische som verstaat en als afstand (x, y) der punten x, y neemt $|x - y|$.

Een functie $f(x)$ van de reëele veranderlijke x met reëele functiewaarden kan als een operatie in R_1 worden beschouwd met $f(x)$

eveneens in R_1. Daardoor volgen uit de eigenschappen 1—3 onmiddellijk de beide stellingen:

Stelling A_1. *Is $f(x)$ reëel (en eindig) voor alle reëele x-waarden en voldoet ze aan de additieve functionaalvergelijking $f(x+y) = f(x) + f(y)$, dan is ze continu voor iedere x* [en dus volgens Cauchy van de gedaante Ax], *zoo ze continu is voor één enkele x.* Een overigens ook op directe wijze eenvoudig te bewijzen resultaat.

Stelling A_2. *Is $f(x)$ reëel (en eindig) voor alle reëele x-waarden en voldoet ze aan de additieve functionaalvergelijking, dan is ze continu voor iedere x, zoo ze naar Borel meetbaar is, of,* algemeener, *zoo ze de voorwaarde van Baire vervult.*

Discontinue oplossingen der additieve functionaalvergelijking zijn dus in ieder punt discontinu; ze zijn niet meetbaar naar Borel en zullen zelfs de voorwaarde van Baire niet vervullen.

Een tweede metrische groep $\mathfrak{R}_1$ verkrijgen we als volgt. Punt is iedere verzameling van reëele getallen van de gedaante $x + 2k\pi$, met $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ In $\mathfrak{R}_1$ is de som $X + Y$ van de punten $X = \{x + 2k\pi\} (k = 0, \pm 1, \ldots)$ en $Y = \{y + 2l\pi\} (l = 0, \pm 1, \ldots)$ het punt $Z = \{x + y + 2m\pi\}$ $(m = 0, \pm 1, \ldots)$. Afstand (X, Y) van X en Y is $|(x + 2\bar{k}\pi) - (y + 2\bar{l}\pi)|$, waarbij $\bar{k}$ en $\bar{l}$ zoodanig gekozen zijn, dat deze modulus $\leqq \pi$ is; de afstand is aldus ondubbelzinnig bepaald en voldoet aan de voorwaarden *a*), *b*) en *c*) uit het begin van paragraaf 1. Ook alle verdere kenmerken eener metrische groep zijn vervuld.

Definieeren we nu een operatie $U(x)$ met $x \in R_1$, $U(x) \in \mathfrak{R}_1$, zoo laat zich $U(x)$ ook beschouwen als een oneindig veelwaardige functie in R_1, welker (tot R_1 behoorende) waarden voor eenzelfde x paarsgewijs steeds veelvouden van 2π verschillen. $U(x)$ zal continu zijn in een punt x van R_1, als bij willekeurig positieve $\varepsilon < \pi$ steeds een positief getal δ bestaat, zoo dat uit $|x - x_0| < \delta$ volgt $(U(x), U(x_0)) < \varepsilon$, d.w.z. als onder de oneindig vele, de punten $U(x)$, $U(x_0) \in R_1$ vastleggende getalwaarden steeds een paar $\overline{U}(x)$, $\overline{U}(x_0)$ gevonden kan worden met $|\overline{U}(x) - \overline{U}(x_0)| < \varepsilon$. Het zal duidelijk zijn, dat binnen $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ aftelbaar vele eenwaardige functies $\overline{U}_i(x)$ bestaan, met waarden in R_1, welke in x_0 continu zijn en die gezamenlijk voor iedere x van dat interval alle $U(x)$ bepalende getalwaarden één-, doch ook slechts éénmaal

opleveren. Ook zal het duidelijk zijn, [3]) dat $U(x)$ in R_1 dan en alleen dan continu is, als zich voor iedere x uit de $U(x)$ bepalende rij van getalwaarden één waarde $\overline{U}(x)$ zoodanig laat aanwijzen, dat al die waarden een in R_1 continue functie (met waarden in R_1) vormen; door bijtelling van $2k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$) krijgt men eveneens continue functies, die de overige, $U(x)$ bepalende getalwaarden opleveren.

Stelling B_1. *Een additieve operatie $U(x)$ met $x \in R_1$, $U(x) \in \mathfrak{R}_1$ is continu voor iedere x, zoo ze continu is voor één enkele x; elk der bijbehoorende, éénwaardige, continue functies $\overline{U}_j(x)$ voldoet aan de kongruentie:*

$$\overline{U}_j(x + y) \equiv \overline{U}_j(x) + \overline{U}_j(y) \qquad (mod\ 2\pi),$$

waaruit volgt, dat $U(x)$ de gedaante $\{Ax + 2\,k\pi\}$ ($k = 0, \pm 1, \ldots$) *heeft.* [4])

Stelling B_2. *Een additieve operatie* $U(x)$, *met* $x \in R_1$, $U(x) \in \mathfrak{R}_1$, *is continu voor iedere x, zoo ze naar Borel meetbaar is, of,* algemeener, *de voorwaarde van Baire vervult.*

Discontinue additieve operaties zijn dus in ieder punt discontinu; zij zijn niet meetbaar naar Borel en vervullen zelfs de voorwaarde van Baire niet.

3. Voldoen de functies $f(x)$ en $g(x)$ met $x \in R_1$, $f(x) \in R_1$, $g(x) \in R_1$ aan de functionaalrelatie

$$f(x - y) = f(x) \cdot f(y) + g(x) \cdot g(y),$$

en is minstens één van beide niet constant, zoo is de in R_1 gedefini-

---

[3]) Men gebruike de overdekkingsstelling van Borel voor in R_1 begrensde, gesloten verzamelingen.

[4]) Uit $\overline{U}_j(x + y) \equiv \overline{U}_j(x) + \overline{U}_j(y)$ (mod 2π) volgt voor $x = y = 0$

$$U_j(0) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2\pi).$$

Men kan dus $\overline{U}_0(0) = 0$ nemen. Wegens de continuïteit van $\overline{U}_0(x)$ volgt uit de kongruentie

$$\overline{U}_0(x + y) = \overline{U}_0(x) + \overline{U}_0(y) + 2\,m\pi$$

met het geheele getal m vast; $x = y = 0$ geeft

$$0 = 2m\pi \text{ of } m = 0.$$

De continue functie $\overline{U}_0(x)$ voldoet dus aan de additieve functionaalvergelijking en is daardoor van de gedaante Ax; algemeen heeft $\overline{U}_j(x)$ de vorm $Ax + 2j\pi$ ($j = 0, \pm 1, \ldots$).

eerde operatie U (x), met U (x) $\epsilon\, \Re_1$, waarbij voor elk der U (x) bepalende getalwaarden $\overline{U}_i(x)$ gelijktijdig geldt

$\overline{U}_j(x)$ = een der waarden van bg cos $f(x)$

èn = een der waarden van bg sin $g(x)$,

additief. [5])

Continuïteit in x van $f(x)$ en $g(x)$ impliceert, dat de operatie $U(x)$ eveneens continu is in x. Zijn de functies $f(x)$ en $g(x)$ naar Borel meetbaar, zoo geldt hetzelfde van de operatie $U(x)$. Daardoor laten zich de beide volgende stellingen direct uit de stellingen B_1 en B_2 afleiden.

Stelling C_1. *Voldoen de functies $f(x)$ en $g(x)$, met $x \epsilon R_1$, $f(x) \epsilon R_1$, $g(x) \epsilon R_1$, aan de functionaalrelatie*

$$f(x-y) = f(x) \cdot f(y) + g(x) \cdot g(y),$$

is minstens een van beide niet constant, en zijn beide voor één enkele x-waarde continu, zoo zijn zij continu voor iedere x; en men heeft dan $f(x) = \cos Ax$, $g(x) = \sin Ax$, met A konstant en $\neq 0$.

Immers de bijbehoorende operatie $U(x)$ voldoet aan de voorwaarden van stelling B_1, waaruit volgt, dat $U(x)$ de gedaante $\{Ax + 2k\pi\}$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$ moet hebben, dus alleen

$$f(x) = \cos U(x) = \cos Ax,\quad g(x) = \sin U(x) = \sin Ax$$

mogelijk is; deze functies voldoen voor $A \neq 0$ inderdaad aan de aangenomen voorwaarden.

Stelling C_2. *Voldoen de functies $f(x)$, $g(x)$, met $x \epsilon R_1$, $f(x) \epsilon R_1$, $g(x) \epsilon R_1$, aan de functionaalrelatie*

$$f(x - y) = f(x) \cdot f(y) + g(x) \cdot g(y),$$

en is minstens een van beide niet constant, terwijl tevens beide naar Borel meetbaar zijn, of, algemeener, *de voorwaarde van Baire ver-*

---

[5]) Men zie Art. *2*, p. 56 (1e al), 58 (1e—3e al.), 61 e. 62; steeds is $\{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2 = 1$. — De opmerking loc. cit. p. 58 (4e al.), volgens welke in Art. *1* de voorwaarde $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = 1$ bij de afleiding der juist genoemde gelijkheid geheel onnoodig zou zijn gebruikt, is kennelijk onjuist; daar immers in Art. *1* de genoemde voorwaarde de eenige is, welke naast de functionaalvergelijking $f(x - y) = f(x) \cdot f(y) + g(x) \cdot g(y)$ gesteld wordt, is het o.m. onmogelijk de constante oplossing $f(x) = g(x) = 0$ der functionaalvergelijking uit te sluiten zonder die voorwaarde te benutten.

vullen, zoo zijn $f(x)$ en $g(x)$ continu voor iedere x, en is dus weer $f(x) = \cos Ax$, $g(x) = \sin Ax$ (A konstant en $\neq 0$).

4. Een laatste groep van stellingen berust op de toepassing van een bekende stelling van Lusin[6]): Opdat eèn op het segment $[a, b]$ eindige functie $f(x)$ op $[a, b]$ naar Lebesgue meetbaar is, is noodig en voldoende dat bij willekeurig pos. ε een op $[a, b]$ continue functie $F(x)$ bestaat, welke daar met $f(x)$ samenvalt in de punten eener gesloten deelverzameling E met maat $> (b - a) - \varepsilon$.

De eerste dezer stellingen werd bewezen door Fréchet,[7]) Sierpinski[7]) en Banach,[7]) en luidt als volgt:

Stelling A_3. *Is $f(x)$ reëel (en eindig) voor alle reëele x-waarden en voldoet ze aan de additieve functionaalvergelijking $f(x + y) = f(x) + f(y)$, dan is ze continu voor iedere x, zoo ze naar Lebesgue meetbaar is.*

Het bewijs van Banach berust evenals het hier volgende bewijs van stelling B_3 op de toepassing der genoemde stelling van Lusin en kan gemakkelijk naar analogie worden gereconstrueerd.

Stelling B_3. *Een additieve operatie $U(x)$, met $x \in R_1$, $U(x) \in \Re_1$, is continu voor iedere x, zoo zich voor iedere x uit de $U(x)$ bepalende rij van getalwaarden steeds één zoodanig laat uitkiezen, dat er een in R_1 eenwaardige, naar Lebesgue meetbare functie $\overline{U}(x)$ ontstaat.*

Zij x_0 een willekeurig punt in R_1 en $[a, b]$ een x_0 als inwendig punt bevattend segment. Bij $\epsilon = \frac{b-a}{3}$ bestaat nu, volgens het theorema van Lusin, een in $[a, b]$ continue functie $V(x)$, welke daar met $\overline{U}(x)$ samenvalt behalve in de punten eener deelverzameling P met maat $< \varepsilon$. Tevens bestaat bij positieve $\eta < \pi$ een positief getal $\delta < \varepsilon$ zoodanig dat uit $| h | < \delta$ en $x, x + h$ in $[a, b]$ steeds volgt

$$(1) \qquad | V(x + h) - V(x) | < \eta.$$

Bij vast gekozen h met $| h | < \delta$ zal

$$\overline{U}(x + h) = V(x + h)$$

---

[6]) Zie b.v. S. Saks, Theory of the integral, Warschau 1937, p. 72.

[7]) Zie M. Fréchet, Enseignement math. *15* (1913), p. 390; W. Sierpinski, Fund. math. *1* (1920), p. 116—122 en p. 128, 129; S. Banach, Fund. math. *1* (1920), p. 123, 124.

zijn in alle punten van $[a, b]$ met uitzondering van die eener verzameling Q met maat $< |h| + \varepsilon < \delta + \varepsilon < 2\varepsilon$.

De verzameling van punten x van $[a, b]$, in welke minstens één der gelijkheden

$$(2) \qquad \overline{U}(x+h) = V(x+h), \overline{U}(x) = V(x)$$

niet geldt, heeft dus een maat $< m(P+Q) < 3\varepsilon = b - a$. Er bestaat dus een van h afhangend punt x van $[a, b]$, waarin de formules (1) en (2) gelijktijdig gelden. Voor zoo'n x is dus ook

$$(3) \qquad |\overline{U}(x+h) - \overline{U}(x)| < \eta.$$

Daar de operatie $U(x)$ additief is, bestaan er twee getallen $U^{(1)}(h)$, $U^{(2)}(h)$ uit de $U(h)$ bepalende rij van getallen, welke

$$(4) \; \overline{U}(x+h) = \overline{U}(x) + U^{(1)}(h) \text{ en } \overline{U}(x_o+h) = \overline{U}(x_0) + U^{(2)}(h)$$

geven. Daar $U^{(1)}(h) - U^{(2)}(h) = 2k\pi$ is met k geheel (en in 't algemeen afhangend van h), volgt uit (4)

$$(5) \quad [\overline{U}(x+h) - \overline{U}(x)] - [\overline{U}(x_o+h) - \overline{U}(x_o)] = 2k\pi.$$

Uit (3) en (5) volgt

$$|[\overline{U}(x_o+h) + 2k\pi] - \overline{U}(x_o)| < \eta$$

voor $|h| < \delta$. Vervangt men dus $\overline{U}(x_0+h)$ voor iedere h met $|h| < \delta$ door $\overline{U}(x_o+h) + 2k\pi$, dan krijgt men een uit de operatie $U(x)$ afgeleide, in $(x_o - \delta, x_o + \delta)$ ondubbelzinnig vastgelegde, eenwaardige functie $\overline{U}_0(x)$, die bovendien continu is in x_0, gelijk men gemakkelijk inziet; alle overige, de operatie $U(x)$ in $(x_o - \delta, x_o + \delta)$ vastleggende getalwaarden worden geleverd door de functies $\overline{U}_j(x) = \overline{U}_o(x) + 2j\pi (j = \pm 1, \pm 2, \ldots)$. De operatie $U(x)$ is continu in x_o, en toepassing van stelling B_1 geeft continuïteit van $U(x)$ voor iedere x.

5. Zijn $f(x)$ en $g(x)$ in R_1 eindig en naar Lebesgue meetbaar, en voldoen ze aan de functionaalrelatie

$$f(x-y) = f(x) \cdot f(y) + g(x) \cdot g(y),$$

terwijl minstens een van beiden niet constant is, zoo bestaat (zie § 3) een in R_1 gedefinieerde operatie $U(x)$, met $U(x) \in \mathfrak{R}_1$, bij welke voor elk der $U(x)$ bepalende getalwaarden $\overline{U}_j(x)$ gelijktijdig geldt

$$\overline{U}_j(x) = \text{een der waarden van bg cos } f(x)$$
$$\text{èn} = \text{een der waarden van bg sin } g(x);$$

$U(x)$ is additief. De eenwaardige functie $\mathfrak{U}(x)$, die uit $U(x)$ ontstaat door die waarde $\overline{U}_{j(x)}(x)$ der $U(x)$ bepalende getallenrij aan $\mathfrak{U}(x)$ gelijk te stellen, voor welke

$$-\pi \leqq \overline{U}_{j(x)}(x) < \pi$$

geldt, is nu ook naar Lebesgue meetbaar. Daardoor volgt uit stelling B_3 (vgl. § 3):

Stelling C_3. *Voldoen de functies* $f(x)$ *en* $g(x)$, *met* $x \epsilon R_1$, $f(x) \epsilon R_1$, $g(x) \epsilon R_1$, *aan de functionaalrelatie*

$$f(x-y) = f(x) \cdot f(y) + g(x) \cdot g(y),$$

is minstens één van beide functies niet constant, en zijn beide naar Lebesgue meetbaar, zoo zijn ze continu voor iedere x, en is dus $f(x) = \cos Ax$, $g(x) = \sin Ax$, *met A konstant en* $\neq 0$.

HOOFDSTUKKEN
UIT DE MODERNE FORMELE LOGICA

DOOR

E. W. BETH.

I. INLEIDING.

§ 1. *Object en methode der formele logica.* Elk sluitend betoog, elke strenge *redenering,* is opgebouwd uit elementen of eenheden, die de volgende fundamentele eigenschap bezitten: men kan ten opzichte van elk dezer elementen of eenheden afzonderlijk met zin de vraag stellen of ze wáár, dan wel ònwaar zijn; men pleegt ze aan te duiden als *oordelen.*

Ook in het oordeel zelf zijn nog min of meer zelfstandige elementen te onderscheiden, maar dit zijn in het algemeen niet weer oordelen (al is het, zoals we spoedig zullen zien, mogelijk, dat één oordeel als bestanddeel van een ander optreedt). In den loop van onze beschouwingen zullen we de elementen van het oordeel leren classificeren. Het uitgangspunt is de onderscheiding van *vervangbare* en *niet-vervangbare* elementen in het oordeel.

Ik beschouw ter voorlopige oriëntering het oordeel

„Socrates is sterfelijk".

Vervang ik „Socrates" door „Plato", „Beethoven" of „Napoleon", „sterfelijk" door „beroemd" of „scherpzinnig", dan krijg ik andere oordelen; maar vervang ik „is" door „loopt", dan krijg ik niet iets, waarvan men met zin kan vragen, of 't waar dan wel onwaar is, geen oordeel dus. Vervangbare elementen zijn dus „Socrates" en „sterfelijk", niet-vervangbaar is „is".

Evenzo zijn in

„alle mensen zijn sterfelijk"

„mensen" en „sterfelijk" vervangbare, „alle" en „zijn" niet-vervangbare elementen.

Klaarblijkelijk maken de niet-vervangbare elementen het oordeel

tot oordeel, de vervangbare maken het tot dit bepaalde oordeel, zij geven het oordeel zijn bepaaldheid. Men pleegt te zeggen: de vervangbare elementen bepalen de inhoud, de niet-vervangbare de vorm van het oordeel.

Het is duidelijk, dat ook bij de redenering vorm en inhoud te onderscheiden zijn: de vorm van de redenering hangt, behalve van de vorm van de oordelen, waaruit ze bestaat, ten dele ook van hun inhoud af; dit zal nog nader worden toegelicht.

Om de vorm van een oordeel zuiver te beoordelen, moet men eigenlijk letten op redeneringen, waarin het voorkomt. Men zou geneigd zijn, in het oordeel

„alle mensen zijn sterfelijk"

het element „alle" voor vervangbaar te houden: men kan het immers door „sommige" vervangen. Dat dit onjuist is, blijkt, wanneer men let op de redenering

„alle mensen zijn sterfelijk
„Socrates is een mens

„Socrates is sterfelijk".

Vervangt men „alle" door „sommige", dan blijft de redenering niet sluitend.

Zo zou men bij oppervlakkige beschouwing kunnen menen, dat de oordelen: „Jan en Piet zijn voetballers" en „Jan en Piet zijn broers" dezelfde vorm bezitten; let men echter op de beide redeneringen

„Jan is een voetballer	„Jan is een broer
„Piet is een voetballer	„Piet is een broer
„Jan en Piet zijn voetballers"	„Jan en Piet zijn broers".

dan springt het verschil in logische vorm aanstonds in het oog. Een zelfde grammaticale vorm drukt tweeërlei logische vorm uit: dit is een der voornaamste redenen voor het invoeren van een speciale logische symboliek.

Tevens zal nu duidelijk zijn geworden, waarom de onderscheiding van vorm en inhoud zo belangrijk is: het sluitend karakter van een redenering wordt bepaald door haar vorm. Dit is aanleiding, oordelen en redeneringen onder abstractie van de inhoud te beschouwen, m.a.w. de vorm van oordelen en redeneringen tot object van onderzoek te maken; de wetenschap, die zich hiermee bezighoudt, is de *formele logica*.

In plaats van nu echter, zoals men wellicht zou verwachten, de oordeels- en redeneervormen door analyse te verzamelen, gaat de formele logica juist andersom te werk. Ze onderzoekt weliswaar, om te beginnen, op welke wijze oordelen en redeneringen uit hun elementen zijn opgebouwd, maar brengt daarna het systeem der oordeels- en redeneervormen constructief voort. De methode der formele logica in deze is in hoofdzaak synthetisch; de analyse wordt slechts heuristisch toegepast.

In overeenstemming hiermee wordt de formele logica in deductieve vorm uiteengezet; haar resultaten worden door redenering afgeleid. Men moet zich echter niet voorstellen, dat deze redeneringen zouden moeten dienen om ons van de juistheid van de resultaten van de formele logica te overtuigen: daarin ware blijkbaar een circulus vitiosus gelegen. Integendeel: het enige kriterium voor de juistheid van de formele logica bestaat in de aanvaarding van haar resultaten in de practijk van het wetenschappelijk betoog. De deductieve uiteenzetting van de formele logica kan niets anders beogen dan samenhang, eenheid, te brengen in de verscheidenheid der oordeels- en redeneervormen.

§ 2. *Verhouding van de logica tot de psychologie.* Deze verhouding is reeds zeer vaak tot onderwerp van studie en discussie gemaakt. Ik wil me daarom hier bepalen tot enkele opmerkingen, aanknopend bij de niet lang geleden verschenen dissertatie van *H. Nieuwenhuis* [1]).

Nieuwenhuis is van mening, dat *Selz* bij bepaalde psychologische onderzoekingen [2]) de grens tussen logica en psychologie heeft overschreden en zich in werkelijkheid met logica, zij het niet met formele, doch met „inhaltliche" logica, bezighoudt. Hij meent, dat *Selz,* wanneer hij het geordende denkverloop en niet het ongeordende tot voorwerp van onderzoek maakt, een beroep moet doen op een beginsel van beoordeling en daartoe het terrein der psychologie moet verlaten, om over te gaan op dat der logica.

Dit argument houdt m.i. geen steek. Inderdaad doet *Selz* een

---

[1]) *H. Nieuwenhuis,* „Een onderzoek naar de betekenis der denkpsychologische opvattingen voor de didactiek der lagere school". Diss. Amsterdam, Groningen-Batavia 1939.

[2]) *O. Selz,* „Die Gesetze der produktiven und reproduktiven Geistestätigkeit". Bonn 1924.

beroep op een beoordeling, maar hij beoordeelt het denkverloop niet naar de juistheid van zijn resultaat, maar naar zijn doeltreffendheid. De orde, die *Selz* beschouwt, is er een van teleologische aard en het probleem, dat hij zich stelt, is: hoe ontstaat deze orde? Het tot-stand-komen van de teleologische orde verklaart *Selz* uit een causale samenhang van partiële intellectuele operaties, die elk afzonderlijk op een bepaalde wijze doeltreffend zijn. Zijn methode is dan ook een zuiver biologische, zoals hij l.c. blz. 31 zelf opmerkt.

Dat *Selz* wel degelijk op het oog heeft „natuurnoodwendigheden, die ons denken in een zo nauw keurslijf omsluiten, dat er geen ontsnappen aan is" (l.c. blz. 62), blijkt op blz. 30, waar hij zegt, dat „gerade die konstanten gesetzmässigen Zuordnungen der geistigen Operationen und die Wiederkehr der gleichen Auslösungsbedingungen die Voraussetzung der Entwicklung, der Entstehung neuer Operationen und neuer geistiger Produkte bilden".

Met formele logica heeft dit alles niet of nauwelijks te maken. Ik wil daarom de belangwekkende onderzoekingen van *Selz* verder laten rusten en nog even ingaan op wat *Nieuwenhuis* over de formele logica zegt: „. . . het gebied der formele logica <staat> alle normale mensen in gelijke mate ten dienste . . ., omdat het denken volgens de wetten der formele logica wezens-inhaerent is aan de menselijke geest. Deze formele logica is arm aan inhoud. . . Het is dan ook begrijpelijk, dat op het terrein der formele logica het menselijke geslacht in zijn culturele ontwikkeling geen vooruitgang toont, en dat, sinds *Aristoteles* de formele logica tot formulering bracht, hieraan niets meer toegevoegd kon worden" (l.c. blz. 68).

De drie beweringen, die *Nieuwenhuis* hier ten beste geeft, zijn alle volkomen onjuist. Ik begin met de tweede; blijkbaar is de moderne ontwikkeling van de formele logica aan de aandacht van Dr. *Nieuwenhuis* ontsnapt. Voorzover de inhoud van de nu volgende hoofdstukken geen voldoende weerlegging van zijn bewering mocht vormen, moge ik verwijzen naar lijviger werken op dit gebied, b.v. naar dat van Prof. *R. Feys* in de Philosophische Bibliotheek.

Wat de eerste en derde bewering betreft, niemand zal na de lezing van deze hoofdstukken betwisten, dat van de door de moderne

DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING.

BETH, Dr. H. J. E., **Inleiding tot de Differentiaal- en Integraalrekening,** met toepassingen op verschillende gebieden, ... geb. *f* 12,05*
Antwoorden . . . . - 1,05*

BREMEKAMP, Prof. Dr. H., **Partiëele Differentiaalvergelijkingen** met toepassingen . . . . geb. - 6,05*

LANDAU, Prof. Dr. EDMUND, **Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung** . . . . geb. - 14,15*

VAN OS, Prof. Dr. C. H., **Inleiding tot de Functietheorie,** . .. . geb. - 6,05*

VAN OS, Prof. Dr. C. H., **Moderne Integraalrekening,** Inleiding tot de leer der puntverzamelingen en der integralen van Lebesque, geb. - 5,75*

RUTGERS, Prof. Dr. J. G. en Prof. Dr. F. SCHUH, **Compendium der Hogere Wiskunde III,** . . . . geb. - 9,45*
Deel IV . . . . geb. - 16,25*

SCHOUTEN, Prof. Dr. G., **Inleiding tot de studie der elliptische functies,** in slap linnen bandje . . . . - 1,70*

SCHUH, Prof. Dr. F., **Vraagstukken over Diff. en Int. rek. en over Anal. en Beschr. Meetkunde.** Met volledige aanwijzingen ter oplossing.
Deel I A, Vraagstukken over Differentiaalrekening . . . gec. - 8,40*
Deel II, Schriftelijke vraagstukken van het examen K V . . gec. - 7,85*
Supplementen van 1923 tot heden . . . . à - 0,80*
Deel III, Vraagstukken over Diff. en Int. rekening . . . gec. - 15,20*

SCHUH, Prof. Dr. F., **Oneindige producten** (met aanhangsel over gelijkmatige convergentie en gammafuncties) . . . . . geb. - 5,50*

SCHUH, Prof. Dr. F., **Het Getalbegrip, in het bijzonder het onmeetbare getal,** met toepassingen op algebra, differentiaal- en integraalrekening . . . . geb. - 7,85*

STIELTJES, TH. J., **Oeuvres complètes I, II samen** . . . . - 36,75*
in leer gebonden . . . . - 49,85*

VERRIEST, GUSTAVE, **Cours de Mathématiques générales,** 1e partie, Calcul différentiel, Céométrie Analytique à deux dimensions, 2e **druk** . . . . geb. - 6,30*
2e partie, Géometrie Analytique à trois dimensions, Calcul intégral . . . . geb. - 6,30*

VRIES, Prof. Dr. Hk. DE, **Leerboek der Differentiaal- en Integraalrekening en van de theorie der Differentiaalvergelijkingen.**
I. De differentiaal- en elementaire integraalrekening, **2e dr.** geb. - 20,15*
III. Differentiaalvergelijkingen . . . . geb. - 20,15*

VRIES, Prof. Dr. Hk. DE, **Beknopt Leerboek der Differentiaal- en Integraalrekening** met 73 figuren . . . . geb. - 15,75*

WEITZENBÖCK, Prof. Dr. R., **Invariantentheorie** *f* 5,25*, . . geb. - 6,30*

WOLFF, Prof. Dr. J., **Fouriersche Reihen mit Aufgaben** . . . geb. - 2,50*

SCHOOLBOEKEN OVER DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAAL-REKENING.

VOOREN, Dr. W. L. VAN DE, **Grenswaarden, 2e druk** . . . geb. *f* 2,60*

WIJDENES, P. en Dr. H. J. E. BETH, **Nieuwe Schoolalgebra IV,** geb. - 2,35*
" " " **Nieuwe Schoolalgebra IVβ** . . - 0,85*

VISSER, K. H. W., **Analytische Meetkunde, Differentiaal- en Integraalrekening, vooral voor Midd. Techn. Scholen, 2e druk** . . - 2,00*

UITGAVEN P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-BATAVIA.

Ook verkrijgbaar door de boekhandel.

Verschenen de **4e druk** van

P. WIJDENES, Lagere Algebra I

De algebraische grootheden en hun bewerkingen.

Leerboek voor de akte Wiskunde L.O. en voor inrichtingen van onderwijs en voor examens met uitgebreid wiskundeprogramma; tevens leidraad voor aankomende leraren.

gebonden *f* 5,90*

Vroeger verscheen

Lagere Algebra II

Vergelijkingen, functies, grafieken en reeksen.

3e druk . . . . gebonden *f* 8,50*

VRIENDELIJK VERZOEK.

Gaarne ontvangt ondergeteekende, tegen vergoeding van portokosten, present-exemplaren van representatieve Nederlandsche schoolboeken over natuurkunde en scheikunde, voor verzending naar buitenlandsche relaties.

J. H. SCHOGT.

Collega's, die een ex. hebben liggen van de 3e druk Antwoorden Wijdenes en De Lange Algebra II zullen mij verplichten met toezending.

P. WIJDENES.

Verschenen:

P. WIJDENES, Algebra voor Middelbare Handelsscholen **6e druk**
„ Grafiekenschrift . . . . **9e druk**
Noordhoff's Tafel in vier decimalen . . . . **6e druk**
Dr. H. J. E. BETH, Tafels in vier decimalen . . . . . **2e druk**
P. WIJDENES, Algebra voor MULO I . . . . **32e druk**
„ Planimetrie I . . . . **3e druk**
„ Lagere Algebra I . . . . **4e druk**
WIJDENES en DE LANGE, Vlakke Meetkunde I . . . **12e druk**
„ „ „ Vraagstukken uit Rekenboek I **9e druk**
WIJDENES en BETH, Nieuwe schoolalgebra I . . . . **12e druk**
„ „ „ „ „ II . . . . **11e druk**
MOLENBROEK en WIJDENES, Stereometrie . . . . **6e druk**
JOH. HAGE, Koersberekening . . . . **2e druk**
F. HARKINK, Inleiding tot het practisch rekenen (met inbegrip van het gebruik van rekenmachines).

UITGAVEN P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-BATAVIA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel.

K 1819